# Variétés bipolaires et résolution d'une équation polynomiale réelle

Bernd Bank [2], Marc Giusti [3], Joos Heintz [4], Luis Miguel Pardo[5]

February 11, 2009

**Résumé**

Nous avons décrit précédemment un algorithme efficace qui exhibe un point représentatif (algébrique) par composante connexe d'une intersection complète réelle lisse. Ce processus est basé sur l'exploitation des propriétés géométriques des variétés polaires génériques et sa complexité est intrinsèque au problème. Nous introduisons ici une construction naturelle nous permettant de traiter le cas d'une hypersurface singulière par réduction à une situation intersection complète lisse.

**Bipolar varieties and real solving of a single polynomial equation.**

**Abstract**

In previous work we designed an efficient procedure that finds an algebraic sample point for each connected component of a smooth real complete intersection variety. This procedure exploits geometric properties of generic polar varieties and its complexity is intrinsic with respect to the problem. In the present paper we introduce a natural construction that allows to tackle the case of a non–smooth real hypersurface by means of a reduction to a smooth complete intersection.

## Abridged English version

**Context**. This paper is based on the concept of polar varieties which classically goes back to F. Severi and J. A. Todd in the 1930's and beyond that to the work of J.-V. Poncelet in the period of 1813–1829. The modern theory started in 1975 with essential contributions due to R. Piene [14] (global theory), B. Teissier and D. T. Lê [21] and[12], J. P. Henry and M. Merle [10] (local theory), J. P. Brasselet and others (see [22], [14] and [6] for a historical account and references). The aim was a deeper understanding of the structure of singular varieties. On the other hand, classic (and dual) polar varieties became about ten years ago a fundamental tool for the design of efficient computer procedures with *intrinsic* complexity which find real algebraic sample points for the connected components of complete intersection varieties with smooth real trace ([2], [3], [4], [5],[17], [18]). Our method for finding smooth sample points in *singular* real hypersurfaces relies on a deformation which is inspired by the concept of a *non–generic* polar variety. The same problem is treated by a different (the so–called "critical point") method in [19].

Let $V$ be a complex affine algebraic variety given by a polynomial $f(x_1,\dots,x_n)$ of degree $d \geq 2$ over the rational numbers. We assume that the real trace $V_{\mathbb{R}}$ of $V$ is non empty and that the gradient of $f$ does not vanish identically on any connected component of $V_{\mathbb{R}}$. Thus $V_{\mathbb{R}}$ is a real hypersurface.
For any $1 \leq i \leq n-1$ let $A := A_i = [a_{k,l}]$ be a (real) $(n-i)\times n$–matrix of maximal rank. Recall that the $i$–th open polar variety $P_i(A)$ of $V$ consists of the smooth points of $V$ where the tangent plane does not intersect transversally the kernel of $A$. If $A$ is generic, $P_i(A)$ coincides with the usual notion of a (classic) polar variety ([14] and [21]). In this case we shall distinguish $P_i(A)$ as (fully) *generic*.

[1]Research partially supported by the following Argentinian, French and Spanish grants: CONICET PIP 2461/01, UBACYT X-098, PICT–2006–02067, BLAN NT05-4-45732 (projet GECKO), MTM 2007-62799.

[2]Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, 10099 Berlin, Germany. bank@mathematik.hu-berlin.de

[3]CNRS, Lab. LIX, École Polytechnique, 91228 Palaiseau Cedex, France. Marc.Giusti@Polytechnique.fr

[4]Departamento de Computación, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Univ., Pab.I, 1428 Buenos Aires, Argentina, and Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, 39071 Santander, Spain. joos@dc.uba.ar and heintzj@unican.es

[5]Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, 39071 Santander, Spain, luis.pardo@unican.es

In case that $V_{\mathbb{R}}$ is compact and smooth and $P_i(A)$ is (sufficiently) generic, the real trace of $P_i(A)$ is a smooth subvariety of $V_{\mathbb{R}}$ of relative codimension $i$, generically given as a transversal intersection of *canonical* equations. In particular, this real trace is not empty. This may happen to be wrong in case that $V_{\mathbb{R}}$ is not smooth anymore, even if $V_{\mathbb{R}}$ is compact.
Fortunately, we have at our disposal the canonical desingularization of determinantal varieties – *à la Room–Kempf* [16] – in order to inspire us. Let us introduce the incidence variety defined by the system:

$$f(x) = 0, \qquad J(f)^T(x)\,\lambda + A^T\,\mu \;=\; 0 \qquad (*)$$

Here $x$ has to be interpreted as a point of $\mathbb{A}^n$, $A$ as a $(n-i)\times n$–matrix of maximal rank, $\lambda$ belongs to $\mathbb{A}^1$ and $\mu$ to $\mathbb{A}^{n-i}$, with $\mu \neq 0$. The solutions of the system $(*)$ satisfying these open restrictions dominate surjectively the non singular locus $V_{reg}$ of $V$.
The linearly reductive group $G := GL(n-i)\times GL(1)$ acts naturally on

$$E := E^{(i)} := \{(A,\lambda,\mu) \in \mathbb{A}^{(n-i)n}\times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{n-i} \,|\, rank\,A = n-i,\ \mu \neq 0\}$$

and leaves invariant the system $(*)$. The orbit variety $S_i$ of the $G$–action on $V_{reg}\times E$ is a differentiable manifold of dimension $D_i = (i+1)(n-i)-1$. The charts consist of (generally higher codimensional) closed algebraic smooth complete intersections in a suitable affine space. Thus we can apply the algorithmic procedure designed in [4] and [5] to $S_i$. (Sufficiently) generic generalized polar varieties of the $S_i$ are called *bipolar varieties* of $V$. They are organised by decreasing codimension $j$ in strictly ascending chains as follows:

$$B_{i,D_i} \subset \cdots \subset B_{i,j} \subset \cdots \subset B_{i,1} \subset B_{i,0} = S_i$$

Finally with $i$ running from $n-1$ to $1$, we obtain a two-dimensional lattice of bipolar varieties.
A *walk* in this lattice is a path of length at most $n$, starting with some zero–dimensional bipolar variety $B_{i_1,D_{i_1}}$ and ending with some orbit variety $S_{i_2} = B_{i_2,0}$. At each step, the index $i$ or the codimension $j$ decreases and the bipolar varieties visited along the walk, modulo suitable sections and identifications, form an ascending chain of bipolar varieties of exactly by one increasing dimension. And their real trace is dense. Running through a given walk in the reverse mode, we obtain an algorithmic strategy, which as soon that it finds smooth real points on the bipolar varieties, projects them on smooth real points of $V$. Observe that we obtain as a bonus the choices of the matrices $A$ and with them the (non–generic) polar varieties $P_i(A)$.

**Theorem.** *Let $f(x_1,\dots,x_n)$ be a polynomial of degree $d \geq 2$ defining as before complex and real hypersurfaces $V$ and $V_{\mathbb{R}}$. Suppose that $f$ is given by a straight–line program of size $L$. Then each walk $\mathcal{W}$ yields a procedure $\mathcal{R}_{\mathcal{W}}$ that finds at least one real algebraic point per connected component. The sequential time complexity of the procedure $\mathcal{R}_{\mathcal{W}}$ is linear in $L$ and polynomial in $d$, $n$ and a suitable geometric quantity $\delta_{\mathcal{W}}$. The quantity $\delta_{\mathcal{W}}$ is the maximal degree of the bipolar varieties of $V$ visited during the walk and is therefore an intrinsic invariant of $V$ and $\mathcal{W}$. It bounds also the number and the algebraic degree of the sample points produced by $\mathcal{R}_{\mathcal{W}}$.*

From the geometrically unstructured and extrinsic point of view, the quantity $\delta_{\mathcal{W}}$ and the complexity of the procedure $\mathcal{R}_{\mathcal{W}}$ are in worst case of order $d^{\,O(n)}$, which meets all previously known algorithmic bounds (see [9], [11], [15], [19]). Following [8], [7] this asymptotic complexity is also a lower bound and cannot be improved unless intrinsic complexity measures, like $\delta_{\mathcal{W}}$, become introduced.

**Version française**

**Contexte**. Cette contribution repose sur le concept des variétés polaires, qui remonte classiquement à F. Severi et J. A. Todd dans les années 1930 et au-delà à l'œuvre de J.-V. Poncelet dans la période 1813–1829. La théorie moderne commence en 1975 avec des contributions fondamentales de R. Piene [14] (théorie globale), B. Teissier et D. T. Lê [21] et [12], J. P. Henry et M. Merle (théorie locale) [10], J. P. Brasselet et d'autres (voir [22], [14] et [6] pour un historique et des références). Ces travaux tendaient à une compréhension plus profonde de la structure des variétés singulières. D'autre part, les variétés polaires classiques (et duales) sont devenues il y a dix ans un outil fondamental pour le développement d'algorithmes efficaces, de complexité *intrinsèque*, qui trouvent un point réprésentatif algébrique réel dans chaque composante connexe d'une intersection complète avec partie réelle lisse ([2], [3], [4], [5],[17], [18]). Notre méthode pour trouver des points lisses dans des hypersurfaces réelles *singulières* repose sur une déformation qui est inspirée par le concept d'une variété polaire *non–générique*. Le même problème est traité par une méthode différente (dite des "points critiques") dans [19].

**Notations.** Soit $V$ une variété affine complexe donnée par un polynôme $f(x_1,\dots,x_n)$, à coefficients rationnels, de degré au moins $2$. Nous supposerons que la trace réelle $V_{\mathbb{R}}$ de $V$ est non vide et que le gradient de $f$ ne

s'annule pas identiquement sur toute composante connexe de $V_{\mathbb{R}}$. Ainsi $V_{\mathbb{R}}$ est une hypersurface réelle.
Nous aurons besoin des équations des variétés polaires classiques. Pour tout indice $i$ entre $1$ et $n-1$, soit $A := A_i = [a_{k,l}]$ une $(n-i)\times n-$matrice (réelle), supposée de rang maximal. La $i$-ème variété polaire ouverte $P_i(A)$ est alors définie comme l'ensemble des points lisses de $V$ où le plan tangent n'est pas transverse au noyau de $A$. C'est une variété localement fermée. Si $J(f)$ est la matrice jacobienne de $f$, nous l'obtenons comme intersection du lieu régulier de $V$ avec la variété déterminantielle définie par la condition de singularité de la matrice $\left[J(f)(x)^T \quad A^T\right]$ ($^T$ est la transposition). Dans le cas où $V_{\mathbb{R}}$ est lisse, ceci nous fournit évidemment des équations pour la variété polaire réelle proprement dite (clôture de l'ouverte). Si $A$ est générique $P_i(A)$ coincide avec la notion usuelle de variété polaire ([14] and [21]). Dans ce cas nous appellerons $P_i(A)$ (totalement) *générique* .
Pour un choix suffisamment générique de $A$, la variété polaire $P_i(A)$ est lisse, soit vide ou de codimension $i$ dans $V_{\mathbb{R}}$. De plus, elle est génériquement donnée comme intersection transversale d'équations *canoniques.* Si de plus $V_{\mathbb{R}}$ est compact, $P_i(A)_{\mathbb{R}}$ n'est pas vide. Ceci peut devenir malheureusement faux si $V_{\mathbb{R}}$ n'est plus lisse, même si elle est compacte.

**Dominer surjectivement par des fermés lisses l'ouvert de lissité et chaque variété polaire ouverte**

Pour nous ramener à une situation lisse, nous pouvons penser à lissifier par déformation (au détriment de la complexité) ou désingulariser l'hypersurface (pire, car toute estimation de complexité nous échappe). Par chance, nous disposons de la désingularisation canonique des variétés déterminantielles − *à la Room–Kempf* [16] − dont nous allons nous inspirer. Nous introduisons donc la variété d'incidence associé au système :

$$J(f)^T(x)\ \lambda + A^T\ \mu \ = \ 0,$$

où $x$ est un point de $V$, et $(\lambda,\mu) := (\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{n-i})$ un point de $\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^{n-i}$. Le pendant réel de cette construction de variété d'incidence aboutit à l'introduction des multiplicateurs de Lagrange (comme dans [20]) et à un système qui peut s'étudier tel que dans le cas extrême $i=n-1$ (voir [19]). Il y a néanmoins mieux à faire en examinant ses descriptions géométriques naturelles. Sur l'espace de configuration :

$$E := E^{(i)} := \{(A,\lambda,\mu)\in\mathbb{A}^{(n-i)n}\times\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^{n-i}\,|\,rang\,A = n-i,\ \mu\neq 0\}$$

agit naturellement à droite le groupe $G := GL(n-i)\times GL(1)$ : pour $g := (B,t)$ dans $G$ et $e := (A,\lambda,\mu)$ dans $E$, nous définissons l'action

$$E\times G\to E, \qquad (e,g)\mapsto e\cdot g := (\,B^T\cdot A,\ t\lambda, tB^{-1}\cdot\mu).$$

Le quotient catégoriel $E_{/\sim}$ par la relation d'équivalence associée à $G$ est un quotient géométrique, c'est-à-dire admet une structure de variété algébrique car $G$ est linéairement réductif (e.g. [13]). C'est même une variété différentiable dont une carte affine typique s'obtient en prenant la matrice $A$ dans une carte affine de la grassmannienne et $\mu$ dans une carte affine du projectif. Le système polynomial (2) : $f(x)=0, \dfrac{\partial f}{\partial x_l}(x)\,\lambda + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-i} a_{l,k}\,\mu_k = 0$, $(l=1,\ldots,n)$ définit une sous-variété $S_i$ de $\mathbb{A}^n\times E_{/\sim}$ , puisque la projection sur $E$ de $S_i$, formée des solutions dans $\mathbb{A}^n\times E$ du système (2) est $G$-invariante. Ce faisant, nous avons jeté les points de cette variété d'incidence vivant au dessus des points singuliers de $V$. En effet soit $x$ un point régulier de $V$. Choisissons alors la première ligne de $A$ comme l'opposé du gradient de $f$ en $x$, donc non identiquement nulle, et nous pouvons toujours la compléter en une matrice $A$ de rang maximal. Et le point $(x,\,A,(\,1,0,0,\ldots,0))$ est solution du système (2), donc le point régulier $x$ appartient à la projection de $S_i$ sur $\mathbb{A}^n$. Réciproquement, si $x$ est un point singulier de $V$, le système (2) se réduit à $\sum_{k=1}^{n-i} a_{l,k}\,\mu_k\ = 0$, $l=1,\ldots,n$, et la condition de régularité sur $A$ implique que le vecteur $\mu$ est identiquement nul, et donc le point $(A,\,\lambda,\,\mu)$ ne peut appartenir à $E$. Donc l'image par la projection canonique de la variété fermée $S_i$ est l'ouvert de lissité de $V$ (et ne peut donc jamais être compacte dans notre situation singulière). Et pour chaque matrice fixée $A$ la fibre fermée $S_i(A)$ se projette surjectivement sur la variété polaire ouverte $P_i(A)$.
Maintenant le miracle apparaît et consiste en la lissité de la variété $S_i$. C'est en effet une variété différentiable, dont les cartes consistent en des sous-variétés fermées qui sont des intersections complètes lisses. Pour démontrer cela plaçons-nous dans une carte typique de la forme $A=\left[I_{n-i} \quad \tilde{A}\right]$, $\mu=(1,\tilde{\mu})$, où $I_{n-i}$ est la matrice identité

d'ordre $n-i$, $\tilde{A}$ une $(n-i)\times i$–matrice et $\tilde{\mu} := (\mu_2, \ldots, \mu_{n-i})$. Le système (2) devient (3) :

$$\begin{aligned} f(x) =&0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,\lambda + 1 =&0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_l}(x)\,\lambda + \mu_l =&0, \qquad l = 2, \ldots, n-i \\ \frac{\partial f}{\partial x_l}(x)\,\lambda + \tilde{a}_{l,1} + \sum_{k=2}^{n-i} \tilde{a}_{l,k}\ \mu_k =&0, \qquad l = n-i+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Afin de simplifier l'écriture de la matrice jacobienne nous introduisons les $i \times (n-i)$–matrices $Z_j$ dont seule la $j^{\text{ième}}$ ligne est non nulle et vaut $(1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-i})$ :

$$\begin{bmatrix} J(f)(x) & 0 & O & O & \cdots & O \\ * & \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & O & O & \cdots & O \\ * & * & I_{n-i-1} & O & \cdots & O \\ * & * & * & Z_1 & \cdots & Z_i \end{bmatrix}.$$

Ainsi cette matrice jacobienne est de rang maximum sur $S_i$ car $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ne s'annule pas sur $x$ au vu de la seconde équation. La dimension de $S_i$ est $D_i := n-1-i+i(n-i) = (i+1)(n-i)-1$, et nous voyons donc apparaître une intersection complète lisse, ainsi que sa section générique $S_i(A)$ (de dimension $n-1-i$) d'après le lemme de transversalité faible de Thom.

Nous pouvons derechef appliquer à la variété lisse $S_i$ la technologie des variétés polaires généralisées de [4] et [5]. « Suffisamment génériques », nous les appellerons *variétés bipolaires* de $V$. Elles s'organisent par codimension décroissante $j$ en des suites strictement ascendantes :

$$B_{i,D_i} \subset \cdots \subset B_{i,j} \subset \cdots B_{i,1} \subset B_{i,0} = S_i.$$

Finalement, en laissant courir aussi l'indice $i$ de $n-1$ à $1$, nous obtenons un réseau bidimensionnel de variétés bipolaires.
Une *marche* dans ce réseau consiste en un chemin de longueur au plus $n$, partant d'une variété bipolaire de dimension zéro $B_{i_1,D_{i_1}}$ et aboutissant à une variété d'orbite $B_{i_2,0} = S_{i_2}$. À chaque pas, l'indice $i$ ou la codimension $j$ décroissent. Les variétés bipolaires rencontrées au cours de la marche, modulo des sections et des identifications appropriées, forment une suite ascendante au cours de laquelle la dimension augmente exactement de un. Il est important de noter que leur traces réelles sont denses.
Parcourir une marche à l'envers nous fournit une stratégie algorithmique, qui dès qu'elle trouve des points réguliers et réels sur les bipolaires, s'empresse de les projeter sur des points réels lisses de $V$. Remarquons que nous obtenons en bonus les choix adéquats des matrices $A$ (et avec elles les variétés polaires non–génériques $P_i(A)$) et que nous retrouvons le traitement du cas lisse par une marche particulière.

**Théorème.** *Soit $f(x_1, \ldots, x_n)$ un polynôme de degré $d \geq 2$ définissant comme ci-dessus des hypersurfaces complexes et réelles $V$ and $V_{\mathbb{R}}$. Supposons que $f$ soit donné par un calcul d'évaluation direct de taille $L$. Chaque marche $\mathcal{W}$ donne naissance à une procédure $\mathcal{R}_{\mathcal{W}}$ qui exhibe au moins un point algébrique réel par composante connexe de $V_{\mathbb{R}}$. Sa complexité en temps séquentiel est linéaire en $L$ et polynomial en $d$, $n$ et une quantité géométrique appropriée $\delta_{\mathcal{W}}$. Cette quantité est le maximum des degrés des variétés bipolaires de $V$ rencontrées au cours de la marche. C'est donc un invariant intrinsèque de $V$ et $\mathcal{W}$, qui borne également le nombre et le degré algébrique des points représentatifs exhibés par $\mathcal{R}_{\mathcal{W}}$.*

Qui plus est, du point de vue déstructuré et extrinsèque, $\delta_{\mathcal{W}}$ et la complexité de la procédure $\mathcal{R}_{\mathcal{W}}$ sont dans le pire des cas d'ordre $d^{O(n)}$, ce qui retrouve sans surprise les bornes antérieurement connues [9], [11], [15], [19]. Puisqu'en effet d'après les travaux [8] et [7], nous savons que cet ordre de grandeur constitue une borne inférieure de complexité, qui ne peut être améliorée que par des considérations de complexité intrinsèque, comme ici où $\delta_{\mathcal{W}}$ peut être bien plus petit. Et ce d'autant plus que le lieu singulier est gros.

### Un exemple calculatoire

Par un calcul explicite, nous allons maintenant illustrer dans le cas $n := 2$, c'est–à–dire quand $V$ est une courbe plane singulière, notre démarche pour trouver des points algébriques réels lisses dans $V$.

Soit $f$ un polynôme à deux variables $x$ et $y$, à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soient $V \subset \mathbb{C}^2$ la variété complexe qu'il définit et $V_{\mathbb{R}}$ sa trace réelle. Comme dans la note, nous supposerons que $V_{\mathbb{R}}$ contient des points $f$–réguliers (où par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne s'annule pas). La variété lisse $S_1$, comme définie dans la note, possède une carte que nous pouvons décrire comme la sous–variété fermée $W$ de $\mathbb{C}^4$ formée des points $(x, y, \lambda, a) \in \mathbb{C}^4$ solutions du système

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 1 &= 0 \\ \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + a &= 0 \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $V_{\mathbb{R}}$ contient des points oú $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne s'annule pas, nous en concluons que la variété réelle $W_{\mathbb{R}}$ n'est pas vide.

Soit $(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta) \in \mathbb{R}^4$ un point arbitraire dans un ouvert de généricité, que nous préciserons progressivement. La variété bipolaire $B_{1,1}$ – qui dépend de $f$ et de la carte $W$ – est une variété polaire duale de la variété lisse (non compacte !) $S_1$, qui est ici constituée des points critiques de la fonction distance au point $(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta)$, restreinte à $S_1$. En termes équationnels, c'est le lieu d'annulation dans $\mathbb{C}^4$ du système (1) et du déterminant :

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 & 0 \\ \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} & 0 \\ \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} & 1 \\ \alpha - x & \beta - y & \gamma - \lambda & \delta - a \end{bmatrix}.$$

Nous allons démontrer que $B_{1,1}$ contient des points réels (au moins un par composante connexe de $W_{\mathbb{R}}$).

Pour tout point $(x, y, \lambda, a)$ de $W_{\mathbb{R}}$ la sous-matrice à valeurs complexes

$$M := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & 0 & 0 \\ \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial x} & 0 \\ \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} & 1 \end{bmatrix}$$

est régulière.

Nous pouvons donc considérer que $y$ paramètre localement la variété $W_{\mathbb{R}}$, et que celle-ci peut donc être décrite comme le graphe d'une application $(x(y),\, \lambda(y),\, a(y))$.

Pour tout point $(x, y, \lambda, a)$ de $W$, nous déduisons – en dérivant le système (1) par rapport à $y$ – l'identité :

$$(2) \qquad M \begin{bmatrix} x' \\ \lambda' \\ a' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = 0.$$

Restreignons le point $(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta) \in \mathbb{R}^4$ à vivre en dehors de $W_{\mathbb{R}}$ (ce qui est normal pour une fonction distance !). Comme $W_{\mathbb{R}}$ est fermée dans $\mathbb{R}^4$, il existe un point $(x,\, y,\, \lambda,\, a)$ de $W_{\mathbb{R}}$ tel que la fonction distance $(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - \lambda)^2 + (\delta - a)^2$ soit minimale (en fait, dans chaque composante connexe de $W_{\mathbb{R}}$ il existe un point qui minimise cette fonction distance). En de tels points nous avons évidemment :

$$(3) \qquad (\alpha - x)x' + (\beta - y) + (\gamma - \lambda)\lambda' + (\delta - a)a' = 0$$

Considérons la matrice augmentée :

$$\widetilde{M} := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & 0 & 0 \\ \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial x} & 0 \\ \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} & 1 \\ \alpha - x & \gamma - \lambda & \delta - a \end{bmatrix}.$$

Aux points de minimalisation nous avons comme conséquence des équations (2) et (3) :

$$\widetilde{M} \begin{bmatrix} x' \\ \lambda' \\ a' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \beta - y \end{bmatrix} = 0$$

et donc

$$(4) \qquad \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 & 0 \\ \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} & 0 \\ \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} & 1 \\ \alpha - x & \beta - y & \gamma - \lambda & \delta - a \end{bmatrix} = 0.$$

car le noyau de la matrice associé contient un vecteur non trivial. Ceci signifie que ces points de minimisation(réels) appartiennent à la variété bipolaire $B_{1,1}$ . Par argument de transversalité (comme utilisée dans la note), celle-ci est pour un point générique $(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta)$ de $\mathbb{R}^4$ soit $0-$dimensionnelle ou vide. Le calcul précédent exclut ce dernier cas.

Finalement en projetant nous obtenons au moins un point algébrique par composante connexe de l'ouvert sémi–algébrique de $V_{\mathbb{R}}$ où $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ne s'annule pas.

Explicitons tout ceci sur un exemple. Le cas des lèvres de Thom étant trop compliqué pour être traité complètement à la main, prenons l'exemple singulier le plus simple d'une singularité quadratique ordinaire :

$$f(x, y) := x^2 - y^2$$

pour laquelle de plus l'application de Gauss est dégénérée.

Le système (1) s'écrit maintenant :

$$(1') \qquad \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ 2\lambda x + 1 &= 0 \\ -2\lambda y + a &= 0. \end{aligned}$$

L' équation (4) devient alors

$$(4') \qquad \det \begin{bmatrix} x & -y & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & x & 0 \\ 0 & -2\lambda & -2y & 1 \\ \alpha - x & \beta - y & \gamma - \lambda & \delta - a \end{bmatrix} = 0.$$

Choisissons maintenant de nous intéresser á la composante $x = y$. $(4')$ prend la forme :

$$\det \begin{bmatrix} x & -x & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2x} & 0 & x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & -2x & 1 \\ \alpha - x & \beta - x & \gamma + \frac{1}{2x} & \delta + 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Nous avons donc

$$0 = -(\alpha - x)x^2 + (\beta - x)x^2 - (\gamma + \frac{1}{2x})\frac{1}{2} - 2(\delta+1)x = (\alpha-\beta)x^2 + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4x} - 2(\delta+1)x,$$

c'est à dire

$$(5) \qquad (\alpha-\beta)x^3 + 2(\delta+1)x^2 + \frac{\gamma}{2}x + \frac{1}{4} = 0.$$

En excluant $\alpha = \beta$, l'équation (5) a donc un zéro réel $u \neq 0$. Ceci implique que le point algébrique réel $(u, u, -\frac{1}{2u}, -1)$ appartient à la variété bipolaire $B_{1,1}$.

# Références


[1] P. Aubry, F. Rouillier, M. Safey El Din, Real Solving for positive dimensional systems, J. Symb. Comput. 34 (2002) 543-560.

[2] B. Bank, M. Giusti, J. Heintz, G.M. Mbakop, Polar varieties, real equation solving and data structures : The hypersurface case, J. Complexity 13 (1997) 5-27, Best Paper Award J. Complexity 1997.

[3] B. Bank, M. Giusti, J. Heintz, G.M. Mbakop, Polar varieties and efficient real elimination, Math. Z. 238 (2001) 115-144.

[4] B. Bank, M. Giusti, J. Heintz, L.M. Pardo, Generalized polar varieties and an efficient real elimination procedure, Kybernetika (Prague) 40 (2004) 519-550.

[5] B. Bank, M. Giusti, J. Heintz, L.M. Pardo, Generalized polar varieties : Geometry and algorithms. J. Complexity 21 (2005) 377-412.

[6] J.P. Brasselet, Milnor classes via polar varieties, in : AMS, Contemp. Math. 266, 181-187 (2000)

[7] D. Castro, M. Giusti, J. Heintz, G. Matera, L. M. Pardo, The hardness of polynomial equation solving, Found. Comput. Math. 3 (2003) 347–420.

[8] M. Giusti, J. Heintz : Kronecker's smart, little black boxes, in : R.A. DeVore, A. Iserles, E. Süli (Eds.), Foundations of Computational Mathematics, Conf. Oxford 1999, Cambridge University Press, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 284 (2001), 69-104.

[9] D. Grigor'ev, N. Vorobjov, Solving systems of polynomial inequalities in subexponential time, J. Symb. Comput. 5 (1988) 37-64.

[10] J.P.G. Henry, M. Merle, Limites d' espaces tangents et transversalité de variétŐs polaires, in : Algebraic geometry, Proc. int. Conf., La Rabida/Spain 1981, Lect. Notes Math. 961 (1982) 189-199.

[11] J. Heintz, M.F. Roy, P. Solernó, On the complexity of semialgebraic sets, in : G.X. Ritter (Ed.), IFIP Information Processing 89, Elsevier, 1989, 293-298.

[12] D. T. Lê, B. Teissier, Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières, Ann. Math. (2) 114 (1981) 457-491.

[13] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, Geometric Invariant Theory, Springer, 1994.

[14] R. Piene, Polar classes of singular varieties, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4. Sér. 11 (1978) 247-276.

[15] F. Rouillier, M.-F. Roy, M. Safey El Din, Finding at least one point in each connected component of a real algebraic set defined by a single equation, J. Complexity 16 (2000) 716-750.

[16] T. G. Room, The Geometry of Determinatal Loci, Cambridge University Press, London, 1938.

[17] M. Safey El Din, E. Schost, Polar varieties and computation of one point in each connected component of a smooth real algebraic set, in : J. Rafael (Ed.), Proceedings of ISSAC 2003, ACM Press (2003) 224-231.

[18] M. Safey El Din, E. Schost, Properness defects of projections and computation of at least one point in each connected component of a real algebraic set, J. Discrete and Comput. Geom. 32 (2004) 417-430.

[19] M. Safey El Din, Finding sampling points on real hypersurfaces is easier in singular situations, prépublication (2005).

[20] M. Safey El Din, P. Trébuchet, Strong bi-homogeneous Bézout theorem and its use in effective real algebraic geometry, INRIA Research Report RR, 2006.

[21] B. Teissier, Variétes polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney, Algebraic geometry, Proc. int. Conf., La Rabida/Spain 1981, Lect. Notes Math. 961 (1982) 314-491.

[22] B. Teissier, Quelques points de l'histoire des variétés polaires, de Poncelet à nos jours, Sémin. Anal., Univ. Blaise Pascal 1987-1988, 4 (1988).